



TITLE:

# 乱流現象への力学系的アプローチ (双曲型力学系から大自由度力学系 へ)

AUTHOR(S):

河原, 源太

---

CITATION:

河原, 源太. 乱流現象への力学系的アプローチ (双曲型力学系から大自由度力学系へ). 数理解析研究所講究録 2010, 1688: 127-136

ISSUE DATE:

2010-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/141505>

RIGHT:

# 乱流現象への力学系的アプローチ

大阪大学・大学院基礎工学研究科 河原 源太 (Genta Kawahara)  
Graduate School of Engineering Science,  
Osaka University

## 1. はじめに

水や空気などの流体の運動状態は層流と乱流に大別される。層流は乱れのない整然とした流れである。一方、乱流状態では時間的にも空間的にも流れは複雑に乱れ、同じ運動が繰り返されることはない。流れの速さや寸法が小さい、あるいは流体の粘性率が大きい場合には層流が実現される。しかし、我々の日々目にする水や空気の流れの速さや寸法は比較的大きいため、層流から乱流への遷移が起こり、発達した乱流状態が現れることが多い。

乱流に関する研究の歴史は非常に長く、近代乱流研究に話を限っても、その発端となった Reynolds による円管内乱流の実験から既に 120 年余りが経過している。これまでの長年の研究により、種々の乱流場の速度平均や速度積平均などの統計量の特性が明らかにされている。また、エネルギースペクトルの  $-5/3$  乗則や壁乱流の平均速度分布の対数則といった普遍的な統計法則も見出されている (Davidson 2004 参照)。だが、研究の進んだ現在でも、乱流の中でいったい何が起きており、それが乱流の統計性質にどう反映するのか、という基本的な問いに答えることすら容易でないのが実情である。このような状況を招いている主因は、乱流という巨大自由度強非線形散逸力学系の示す複雑でカオス的な時空間構造を簡潔に表現し理解することがきわめて難しい点にある。

最近、乱流遷移や発達した乱流に見られる複雑な時空間的振舞いを、力学系における固定点や周期軌道をはじめとする単純な不変集合によって捉える試みがなされている (Nagata 1990; Itano and Toh 2001; Waleffe 2003; Kawahara and Kida 2001; Kato and Yamada 2003; Kawahara 2005; van Veen, Kida and Kawahara 2006; Viswanath 2007)。この種のアプローチでは、乱流における乱れの維持機構や再生成サイクル、さらには間欠的なバーストが、Navier-Stokes 方程式の平衡解や周期解、あるいはそれらの不安定多様体を用いて表現される。こうして複雑な乱流の動力学の決定論的な側面が、力学系理論により恣意性を排除して解釈あるいは特徴づけられることになる。

本稿では、乱流現象への力学系的アプローチの最新の例として、第 2 章で平面 Couette 流における亜臨界乱流遷移を周期軌道の不安定多様体により表現する試みを紹介し、第 3 章では発達した等方乱流 (Kida-Pelz 流) における大スケール

運動から小スケール運動へのエネルギー伝達過程を不安定周期軌道によって理解する試みを述べる．最後に第4章で今後の研究課題を簡単に述べる．

## 2. 周期軌道の不安定多様体による乱流遷移の記述

最も基本的な壁面剪断流の1つである平面 Couette 流は微小攪乱に対して安定であり，その乱流遷移は有限振幅攪乱によって生じる．したがって，この系の遷移は固有値問題には帰着できず，非線形の初期値問題として初期条件に依存した遷移に対する議論が必要となる．最近，平面 Couette 系において Navier-Stokes 方程式の不安定周期解が求められた (Kawahara and Kida 2001; Kawahara 2005)．この解はレイノルズ数  $Re = 400$ ，周期箱寸法  $(L_x, L_z) = (1.755\pi, 1.2\pi)$  (Hamilton, Kim and Waleffe 1995) において (以下では壁面間距離の半分を1，壁面速度差の半分を1とする)，1周期箱中の流れへのエネルギー注入率  $I$ ，エネルギー散逸率  $D$  の平均値はおおよそ2である．これらは同様の  $Re$ ，周期箱寸法の乱流ではおおよそ3，層流では1の値を取ることから，この解が層流と乱流の中間的性質を持つことがわかる．相空間におけるこの周期解の不安定多様体は2次元であり，その安定多様体は層流と乱流の吸引域境界を形成する (Kawahara 2005)．この層流-乱流吸引域境界を超える有限振幅攪乱を層流に与えると，状態点は安定多様体に沿って一旦周期解に接近した後，その不安定多様体に沿って乱流へ遷移する．したがって，この解の不安定多様体を求めれば，有限振幅攪乱による乱流遷移の初期値に依らない理論的記述が得られることになる．この章では，この不安定多様体を数値的に計算した結果を紹介する．

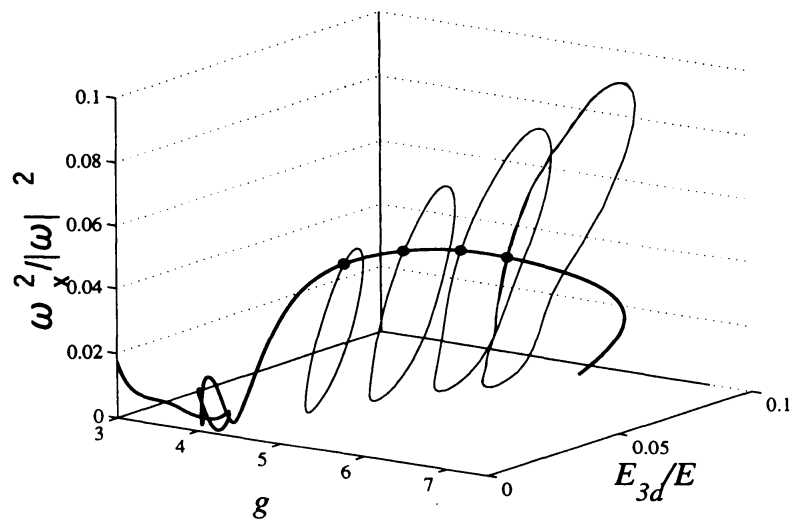


Fig. 1. Unstable manifold on sections  $I + D = 5.0, 5.5, 6.0, 6.4$  and trajectory representing transition to turbulence. Dots are attached to intersection points of the trajectory at  $I + D = 5.0, 5.5, 6.0, 6.4$ .

エネルギー注入率とエネルギー散逸率との和  $I+D$  が 4.5 から 6.4 の間の断面において周期解の不安定多様体を得た。乱流状態は比較的長い時間を  $5.0 \leq I+D \leq 6.4$  において費やす。そこで、それらの範囲の不安定多様体を求めることによって、乱流への遷移を表現することができると期待される。 $I+D \geq 6.0$  での不安定多様体上の状態点に対応する各種統計量（乱れの RMS 速度や RMS 渦度、及び平均速度）や流れ場の構造を調べたところ、同じ断面  $I+D = \text{const.}$  上にあっても、相空間での断面における多様体上の位置によりそれらには大きな違いが見られることがわかった。流れ場の状態が静穏で周期解との変化がほとんど見られない位置や、構造が複雑で乱流と区別がつかないような統計量を示す位置も存在する。図 1 は計算した断面  $I+D = 5.0, 5.5, 6.0, 6.4$  上での多様体と乱流遷移を示す軌道の 1 例（後述）を示したものである。この図の 2 つの軸は、3 次元エネルギー、流れ方向渦度の自乗の空間平均  $E_{3d}$ ,  $\omega_x^2$  をそれぞれエネルギーと渦度の自乗の空間平均  $E$ ,  $|\omega|^2$  で規格化したものである。

層流に対する有限振幅攪乱の注入によって起こる乱流遷移を考える。平行平板間の周期的な非圧縮速度場は、壁垂直 ( $y$ ) 方向速度  $v$ ,  $y$  方向渦度  $\omega_y$ , 流れ ( $x$ ) 方向速度  $u$  とスパン ( $z$ ) 方向速度  $w$  の  $(x, z)$  面に関する平均（ゼロモード）によって決定される。ここでは攪乱は  $v$  のみに与え、その他の成分  $\omega_y$  と  $u$  及び  $w$  のゼロモードはゼロとする。 $v$  に与える攪乱の形は、

$$v = A(y-1)^2(y+1)^2 \left[ \sin\left(\frac{2\pi x}{L_x}\right) + \sin\left(\frac{2\pi z}{L_z}\right) \right]$$

とする。ここに、 $A$  は振幅を表す。この攪乱は境界条件（壁面における非貫通条件）を満足する。この  $v$  によって決まる速度場には 1 周期箱に  $\pm y$  方向のジェットが各 1 つずつ存在する。計算の結果  $A = 0.095$  が振幅の臨界をわずかに超えた値であることがわかった。図 1 に攪乱による乱流遷移を示す。臨界をわずかに超えた攪乱による乱流遷移はおよそ不安定多様体に沿って進行することがわかる。不安定多様体上の状態点に対応する流れ場の構造と乱流遷移過程で見られる構造を比較した結果を図 2 に示す。この図より、平面に平行な方向の位相のずれは存在するが、不安定多様体上の流れの構造と乱流遷移に見られる構造とが類似していることが見て取れる。攪乱の振幅が  $A = 0.010$  である場合についても結果を確認したところ、臨界に近い場合と同様、多様体と乱流遷移との間で構造のよい一致が見られた。

臨界振幅をわずかに超えた攪乱による乱流遷移を考える場合、攪乱の形すなわち初期条件に依らず、状態点は周期軌道の安定多様体に沿って周期軌道に過渡的に接近し、その後周期軌道の不安定多様体に沿って乱流へと遷移する。したがって、周期軌道の不安定多様体によって、初期条件に依存しない乱流遷移の普遍的かつ本質的な記述が可能である。

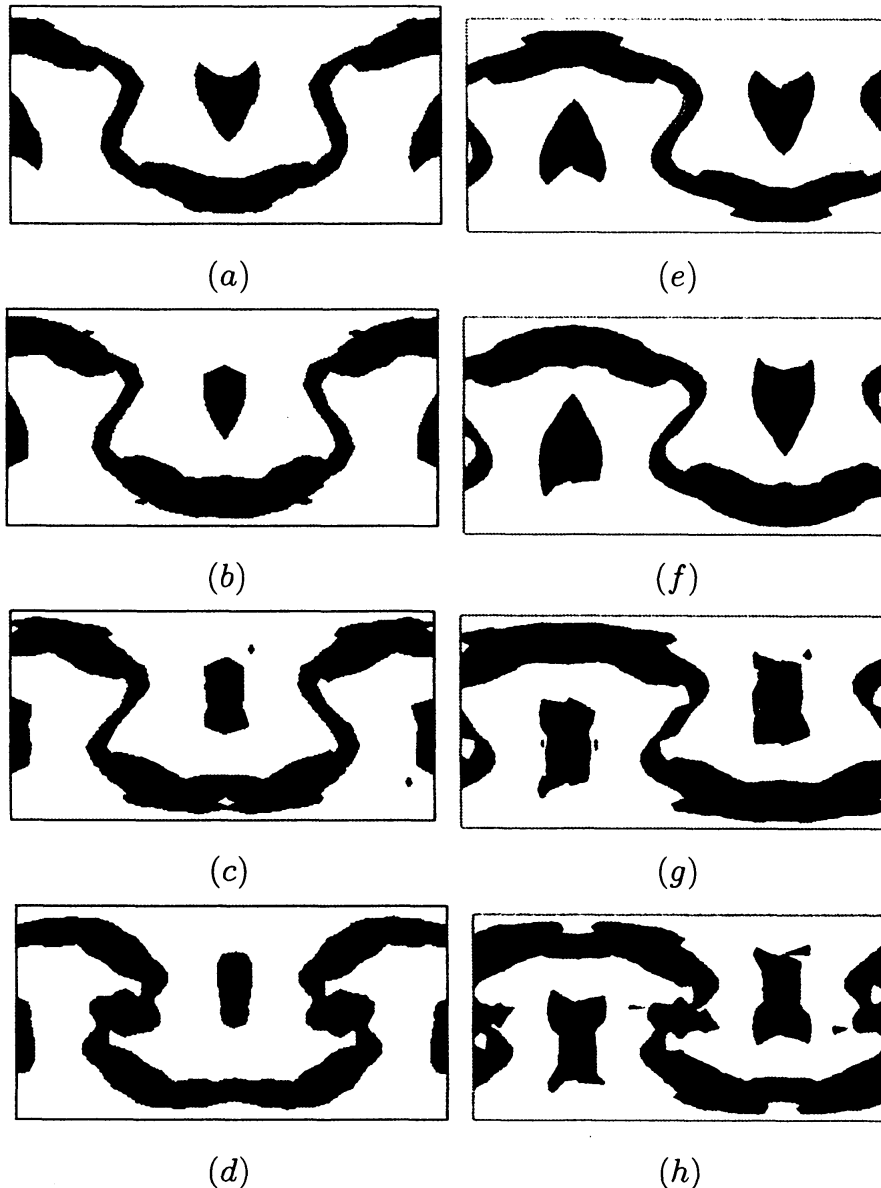


Fig. 2. Comparison of flow structures (a), (b), (c), (d) at the unstable manifold and (e), (f), (g), (h) along the trajectory for transition to turbulence at sections  $I + D = 5.0, 5.5, 6.0, 6.4$ . (a), (e)  $I + D = 5.0$ ; (b), (f)  $I + D = 5.5$ ; (c), (g)  $I + D = 6.0$ ; (d), (h)  $I + D = 6.4$ . The isosurfaces of Laplacian of pressure colored depending on the positive and negative streamwise vorticity, and null streamwise velocity are shown in one periodic box. The vertical and horizontal line of each frame are pointed in the wall-normal  $y$  and spanwise  $z$  direction, respectively.

### 3. 周期軌道による発達した乱流におけるエネルギー伝達の記述

乱流場のいかなる動力学が大スケールの乱れから小スケールの乱れへのエネルギーカスケードをもたらすのかを説明することは、重要な研究課題である。こ

ここでは, Kolmogorov の普遍エネルギースペクトルを再現する Kida (1985) の高対称流 (Kida-Pelz 流) 中の不安定周期運動 (van Veen, Kida and Kawahara 2006) を研究対象とし, 周期運動に見られる渦構造の可視化, および Goto (2008) により提案されたエネルギー伝達率に基き, 渦構造の動力学とエネルギー伝達との関係について考察する.

以下では, 直交右手座標系  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  の各方向に  $2\pi$  の周期性をもつ流れを考える. 周期箱  $0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 2\pi$  において高対称流 (Kida 1985) は,  $x_1 = \pi$ ,  $x_2 = \pi$ ,  $x_3 = \pi$  なる 3 つの平面に関する鏡像対称性, および  $x_1 = x_2 = \pi/2$ ,  $x_2 = x_3 = \pi/2$ ,  $x_3 = x_1 = \pi/2$  なる 3 つの軸に関する  $\pi/2$  回転対称性をもつ. 鏡像対称性と周期性から, 流れは平面  $x_i = n\pi$  ( $i = 1, 2, 3; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) に関して鏡像対称となる. 以上の高対称性を流れに課すと, 基本箱  $0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq \pi/2$  での速度の 1 成分 (例えば  $u_1$ ) によって周期箱の速度 3 成分を表すことができる.

高対称性をもつ非圧縮粘性流体の運動を考える. この系の運動エネルギーの時間平均を一定に保つためには, 流体にエネルギーを供給する必要がある. そこで, (非圧縮性と) 高対称性を満足する最低波数  $k = \sqrt{11}$  の速度 (の  $x_1$  方向成分)

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = \sin(x_1) [\cos(3x_2) \cos(x_3) - \cos(x_2) \cos(3x_3)]$$

に対する Fourier 係数を時間に関して一定に保つことで系にエネルギーを注入する. Navier-Stokes 方程式の数値積分には, 空間に関して Fourier スペクトル法を, 時間に関しては Runge-Kutta-Gill 法を用いる (Kida and Murakami 1989). 不安定周期解は, Navier-Stokes 方程式の数値積分で評価される Poincaré 写像の周期点を, Newton-Raphson 法によって数値的に求めることによって得られる (van Veen, Kida and Kawahara 2006).

以下では, 動粘性係数  $\nu = 3.5 \times 10^{-3}$  の流れに対して, 周期箱の速度場を  $128^3$  の格子点で離散化した数値計算により得られる周期解 (van Veen, Kida and Kawahara 2006) を示す. この周期運動の (単位時間単位質量あたりの) 時間空間平均エネルギー散逸率は  $\varepsilon = 0.10$  であり, 同一条件での乱流のエネルギー散逸率にほぼ一致する. この時間周期流の (Taylor 長に基づく) Reynolds 数は  $Re_\lambda = 67$  である. 周期箱の寸法  $2\pi$  は Kolmogorov 長  $\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$  の約 246 倍である. 周期解の時間周期は, 同一条件下の乱流の最大スケール運動の特性時間の約 2.6 倍, Poincaré 断面への回帰時間  $T_R$  の約 4.9 倍, Kolmogorov 時間  $(\nu/\varepsilon)^{1/2}$  の約 58 倍である.

図 3 (左) は, 各時刻における周期運動の 3 次元エネルギースペクトルの, 時間平均スペクトルからの超過を示したものである. 図中の灰色の部分が正の超過を示す. エネルギースペクトルの正の超過は,  $(k, t)$  面において縞状の領域に認められる. これら縞状領域は図中の横軸 ( $k$  軸) の正の方向に対して, 縦軸 ( $t$  軸) の正の方向へのわずかな傾きをもつ. この傾きは, 高波数でのエネルギーの超過が低波数でのそれに対して時間的に遅れて生じることを意味する. この結果は, 低波数から高波数へのエネルギー伝達が間欠的な事象において行われる

ことを示している。このエネルギー伝達事象の結果、高波数の流体運動が励起されると、エネルギー散逸率が増加する（図3右）。時刻  $t/T_R \approx 0.2 \sim 0.8$ ,  $1.4 \sim 1.7$ ,  $3 \sim 3.8$  および  $4 \sim 4.6$  の4つのエネルギー伝達事象が認められ、特に後半の2つのエネルギー伝達事象は、顕著なエネルギー散逸を引き起こしている。

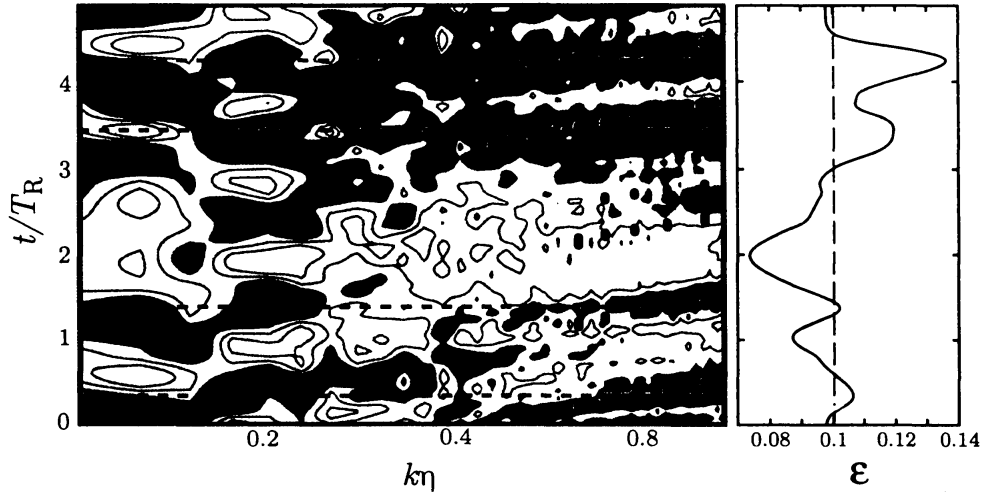


Fig. 3. Excess from temporally-averaged energy spectrum as a function of wavenumber and time (left) and spatially-averaged energy dissipation as a function of time (right). Contour levels of the energy excess, which is normalized by the standard deviation of the energy spectrum, are 0,  $\pm 0.25$ ,  $\pm 0.5$ ,  $\pm 1$ ,  $\pm 2$ , and positive excess is shaded. The horizontal dotted lines denote the time of a local maximum of the energy dissipation, and the vertical dashed line indicates the temporal average of the dissipation. Black dots represent the ‘wavenumber’ corresponding to the length-scale of twelve pairs of counter-rotating tubular vortices visualized in Fig. 4.

以上のエネルギー伝達は、高 Reynolds 数乱流におけるエネルギーカスケードに対応する。 $Re_\lambda = 83$  の周期箱乱流でも同様の高波数へのエネルギー伝達を確認されており (Kerr 1990), さらに  $Re_\lambda = 186$  の高対称乱流では間欠的なエネルギーカスケード事象が報告されている (Kida and Ohkitani 1992)。すなわち、乱流に見られるエネルギーカスケード事象に対応するエネルギー伝達過程が本研究の周期運動によって捉えられているものと期待される。

ここでは、図3に示すエネルギー伝達事象のうち、最も強いエネルギー散逸を伴う  $t/T_R \approx 4 \sim 4.6$  での事象における渦構造の時間発展とそれに伴うエネルギー伝達を考える。強いエネルギー散逸を伴う時刻  $t/T_R \approx 3 \sim 3.8$  の事象でも、同様の時間発展が認められた。また、弱いエネルギー散逸を伴う  $t/T_R \approx 0.2 \sim 0.8$ ,  $t/T_R \approx 1.4 \sim 1.7$  の事象でも、現われる渦構造の渦度の大きさが小さいものの、定性的には類似の様子が観測されたことを付記する。

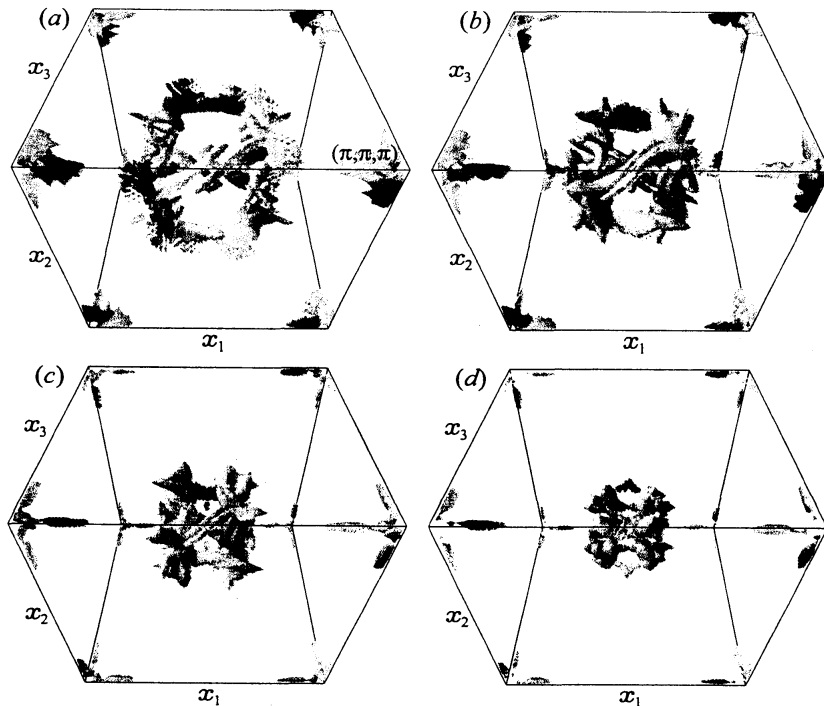


Fig. 4. Vortical structures in the domain  $0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq \pi$  at time (a)  $t/T_R = 4.17$ , (b) 4.31, (c) 4.45, and (d) 4.59. Vortex tubes are visualized by gray isosurfaces of the magnitude of vorticity,  $|\omega|^2 = 7|\overline{\omega}|^2$ .

図4は、エネルギー伝達事象の初期段階で生成された渦管の時間発展を、点  $c = (\pi/2, \pi/2, \pi/2)$  を中心とする領域  $0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq \pi$  で示したものである。点  $c$  (図4中央) の周囲には12組の互いに反対回転する渦管の対が存在し [図4(a)], それらは相互誘導により点  $c$  に接近する [図4(b)]. この接近の際 ( $t/T_R = 4.25$ ) にエネルギー散逸率  $\varepsilon$  が最大となる (図3右参照). 時間の経過とともにこれらの渦管はさらに点  $c$  に接近し [図4(c)], 減衰していく [図4(d)]. このような渦管対の収縮の過程で、それらはおよそその幾何学的相似性を保っていることがわかる. 以上の相互誘導による渦管の自己相似的な収縮とその後の減衰が、エネルギー伝達事象に対応する渦構造の動力学である. なお、点  $(p\pi, q\pi, r\pi)$  ( $p, q, r = 0, 1$ ) 付近にも強い渦度をもつ構造が存在するが、これらは平面  $x_i = n\pi$  ( $i = 1, 2, 3; n = 0, 1$ ) に関する鏡像対称性による拘束を受けるため、それらの運動は点  $c$  周囲の渦管の運動に比べ緩慢である. これらの構造に伴うエネルギー散逸の全体への寄与が点  $c$  付近のそれに比べ小さいことを確認している.

12対24本の渦管群の収縮の中心である点  $c = (\pi/2, \pi/2, \pi/2)$  を中心とする  $l^3$  の立方体  $V(c|l)$  の表面  $\partial V(c|l)$  に関する渦度の大きさの平均

$$\omega(l; t) = \left[ \frac{1}{6l^2} \iint_{\partial V(c|l)} |\omega|^2 dS \right]^{1/2}$$

を考え、 $\omega(l; t)$  の最大値を与える長さ  $l = l_{\max}(t)$  により、渦管群の長さスケールを定義する. この長さに対応する無次元波数  $2\pi\eta/l_{\max}$  を4倍したものを図3に



黒丸で示す．図3においてエネルギー伝達を表すエネルギー超過縞の傾きと渦管群に対応する波数の増加率とがよく一致していることがわかる．したがって，図4に示した渦管群の収縮に伴ってエネルギーが低波数から高波数の流体運動に伝達されることが示唆される．

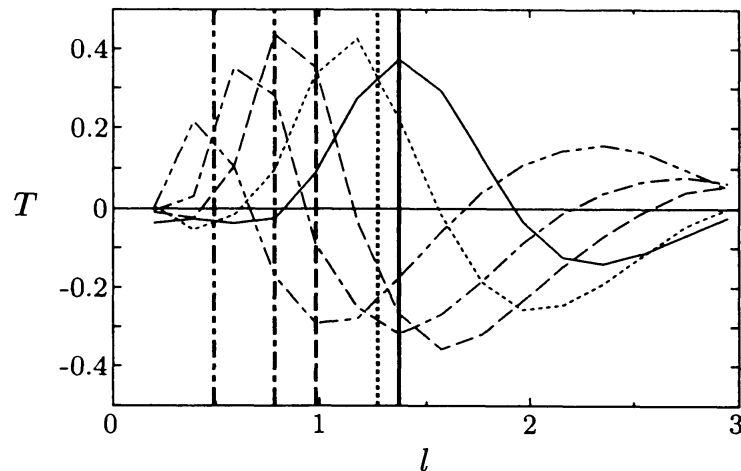


Fig. 5. Energy transfer between two length-scales,  $l$  and  $l/2$ , at the center,  $(x_1, x_2, x_3) = (\pi/2, \pi/2, \pi/2)$ , of shrinking twelve pairs of counter-rotating vortices. The energy transfer rate is shown at time  $t/T_R = 4.19$  (solid line), 4.25 (dotted line), 4.37 (dashed line), 4.48 (dotted-dashed line), and 4.59 (dotted-dotted-dashed line). The thick vertical lines represent the length-scale of twelve pairs of vortices  $l_{\max}$  at corresponding times.

そこで，Goto (2008) によって提案されたエネルギー伝達率

$$T(\mathbf{x}, t|l) = \tilde{T}(\mathbf{x}, t|l) - \frac{1}{V'(\mathbf{x}|l)} \iiint_{V'(\mathbf{x}|l)} \tilde{T}(\mathbf{x}', t|l/2) dV'$$

を考える．ここに， $V'(\mathbf{x}|l) = \iiint_{V'(\mathbf{x}|l)} dV'$  は  $V(\mathbf{x}'|l/2) \subset V(\mathbf{x}|l)$  を満足する点  $\mathbf{x}'$  に関する体積積分を表し，

$$\tilde{T}(\mathbf{x}, t|l) = \frac{1}{l^3} \iiint_{V(\mathbf{x}|l)} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} [\mathbf{u}(\mathbf{x}', t) - \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \rangle_l]^2 dV'$$

である．ただし， $\langle \cdot \rangle_l = \iiint_{V(\mathbf{x}|l)} (\cdot) dV' / l^3$  である． $T(\mathbf{x}, t|l)$  は長さスケール  $l$  と  $l/2$  の流体運動間のエネルギー伝達率を表し， $T(\mathbf{x}, t|l)$  が負（あるいは正）であればスケール  $l$ （あるいは  $l/2$ ）からスケール  $l/2$ （あるいは  $l$ ）へエネルギーが伝達される． $T(\mathbf{x}, t|l)$  の空間分布を調べたところ， $l_{\max}$  より大きいスケールにおける負の大きいエネルギー伝達率は渦管群の中心  $\mathbf{x} = \mathbf{c}$  に現われることが明らかとなった．図5は， $\mathbf{x} = \mathbf{c}$  における  $T$  の  $l$  依存性をエネルギー伝達事象中の5つの時刻で示したものである．渦管群の長さスケール  $l_{\max}$  程度の  $l$  に対する  $T$  は正となっており， $l \approx l_{\max}$  において  $T$  は極大値をとる．一方， $l \approx 2l_{\max}$  においては  $T$

は負の極小値をとる．つまり， $x = c$ を中心とする渦管群のスケールのおよそ倍の長さスケールの流体運動から渦管群へとエネルギー伝達がなされているといえる．さらに，時間の経過（渦管群の収縮）とともに  $T$  の極大値と極小値を与える  $l$  は減少しており，渦管群の収縮によってより小さい長さスケールにエネルギーが伝達されていることがわかる．このように，高対称流中の周期運動においては，大スケールから小スケールへのエネルギー伝達と渦管群の動力学とを定量的に結びつけることができる．

$Re_\lambda = 67$  の高対称流での周期運動における，大スケールから小スケールへのエネルギー伝達をもたらす渦構造の動力学を示した．この動力学は，高対称性の下での特殊な流れ場に対するものではあるが，渦構造の動力学とエネルギー伝達とを直接結びつける具体例として，今後のエネルギーカスケード過程の解明に役立つものと期待される．

#### 4. まとめ

本稿では，最近著者らが取り組んでいる，相空間における単純な不変集合に基づく乱流現象への力学系的アプローチを紹介した．これらの研究では，有限振幅攪乱により発生する平面 Couette 流の亜臨界乱流遷移の骨格が初期条件に依らずに周期軌道の不安定多様体によって捉えられ，一方，発達した等方乱流（Kida-Pelz 流）における渦構造の動力学と大スケール運動から小スケール運動へのエネルギー伝達過程とが不安定周期軌道を用いることによって関連づけられた．

今後，このような乱流現象への力学系的アプローチを試みることにより，乱流の時空間構造やその振舞いに関する理解が，伝統的なアプローチとは異なる新たな視点から進められるものと期待される．しかし，ここで紹介したアプローチには課題も多い．例えば，平面 Couette 流の乱流遷移については，限られた周期箱寸法（Hamilton, Kim and Waleffe 1995）を有する系の振舞いが周期軌道の不安定多様体を用いて記述できたが，実際に実験で観測される乱流遷移を解明するには，もっと広い領域，すなわちもっと大きな自由度の力学系を取り扱う必要がある．また，発達した等方乱流（Kida-Pelz 流）に関しては，高 Reynolds 数で現れる普遍的なエネルギーカスケード（非粘性エネルギー伝達）に関心がもたれるが，これを議論するためには，より高い Reynolds 数での周期軌道に基づく研究が必要となる．さらに，高対称性による拘束の中間スケールあるいは小スケールの運動への影響の吟味も不可欠であろう．

本稿で紹介した結果は，木田重雄先生，L. van Veen 博士，植田泰彦君，松村篤君との共同研究により得られた成果である．また，第 2 章の平面 Couette 流の数値シミュレーションは藤定義先生の計算プログラムにより行われた．ここに記して謝意を表する．

## 文 献

- Davidson, P. A. 2004 *Turbulence*, 107–295, Oxford University Press.
- Goto, S. 2008 A physical mechanism of the energy cascade in homogeneous isotropic turbulence, *J. Fluid Mech.*, **605**, 355–366.
- Hamilton, J. M., Kim, J. and Waleffe, F. 1995 Regeneration mechanisms of near-wall turbulence structures, *J. Fluid Mech.*, **287**, 317–348.
- Itano, T. and Toh, S. 2001 The dynamics of bursting process in wall turbulence, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **70**, 703–716.
- Kato, S. and Yamada, M. 2003 Unstable periodic solutions embedded in a shell model turbulence, *Phys. Rev.*, E **68**, 025302.
- Kawahara, G. 2005 Laminarization of minimal plane Couette flow: Going beyond the basin of attraction of turbulence, *Phys. Fluids*, **17**, 041702.
- Kawahara, G. and Kida, S. 2001 Periodic motion embedded in plane Couette turbulence: regeneration cycle and burst, *J. Fluid Mech.*, **449**, 291–300.
- Kerr, R. M. 1990 Velocity, scalar and transfer spectra in numerical turbulence, *J. Fluid Mech.*, **211**, 309–332.
- Kida, S. 1985 Three-dimensional periodic flows with high-symmetry, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **54**, 2132–2136.
- Kida, S. and Murakami, Y. 1989 Statistics of velocity gradients in turbulence at moderate Reynolds numbers, *Fluid Dyn. Res.*, **4**, 347–370.
- Kida, S. and Ohkitani, K. 1992 Spatiotemporal intermittency and instability of a forced turbulence, *Phys. Fluids*, A **4**, 1018–1027.
- Nagata, M. 1990 Three-dimensional finite-amplitude solutions in plane Couette flow: bifurcation from infinity, *J. Fluid Mech.*, **217**, 519–527.
- van Veen, L., Kida, S. and Kawahara, G. 2006 Periodic motion representing isotropic turbulence, *Fluid Dyn. Res.*, **38**, 19–46.
- Viswanath, D. 2007 Recurrent motions within plane Couette turbulence, *J. Fluid Mech.*, **580**, 319–338.
- Waleffe, F. 2003 Homotopy of exact coherent structures in plane shear flows, *Phys. Fluids*, **15**, 1517.